

Solutions

CCPC Finals 2019



A. Kick Start

- 签到题
- 错误基本都是输出了 11st/21th/22th/23th
- 欢迎参加明年 Kick Start

- g.co/kickstart

B. Infimum of Paths

- 这个题有两种做法,但他们都需要预处理:
- 给一个有向图,每条边上有一个0-9的数字,到从起点到终点的字典序最小路径。
- 为了避免区分路径长度有限和无限的情况,可以加一条 终点到终点边权为 0 的自环。
- 不能达到终点的点都可以删掉。

- 第一种做法是使用点集迭代,记为 S ,初始点集为 $\{0\}$,每次找到点集中的所有点的所有出边的最小权 w ,将最小权计入字符串 $s=s+w$,然后更新点集 $S \leftarrow \{\text{head}(e) \mid e \text{ in edge set, tail}(e) \text{ in } S, \text{weight}(e) = w\}$ 。
- 此迭代进行 $3n$ 次, n 为总点数。对 s 中 n 到 $3n$ 的子串寻找最小循环节,则答案为 s 外加循环节无限循环。

B. Infimum of Paths

第二种做法是对每个点赋予一个rank, 初始所有点的rank相同。

每次对每个点 v 找到它的最小出边的边权, 记为 $w(v)$, 以及用 w 能连到的最小rank的点, 记为 $s(v)$, 将 $s(v)$ 的rank, 记为 $r(v)$ 。

按照 $w(v)$ 第一优先级, $r(v)$ 第二优先级更新所有点的rank。

当所有点的rank稳定后, 即可从起点 $v=0$ 出发, 按照 $s(v)$ 的方向移动, 得到的路径即是答案。

C. Mr. Panda and Typewriter

- 有一台打字机，使用X的代价输入一个字符，Y的代价选择一个子串复制到剪切板，Z的代价把剪切板内容粘贴到当前字符串后面，不可以删除，求输入给定字符串S最小代价
- $dp[i][j]$ 表示输入到长度i，当前剪切板内容为 $S[i-j+1,i]$ 的最小代价
- 考虑转移， $dp[i][j]$ 可由三种情况转移而来

C. Mr. Panda and Typewriter

1. $dp[i-1][k]+X$
2. 选择一个位置 t , $s[t..t+j-1] == s[i-j+1,i]$, 选择这个子串并粘贴, $dp[i-j][k]+Y+Z$
3. 剪切板目前即为 $s[i-j+1,i]$ 这个子串, 假设为位置 t , 那么从 t 到 $i-j$ 这一段只能靠输入单个字符, 不能使用复制和粘贴操作, $dp[t][j]+(i-j-t)*X+Z$

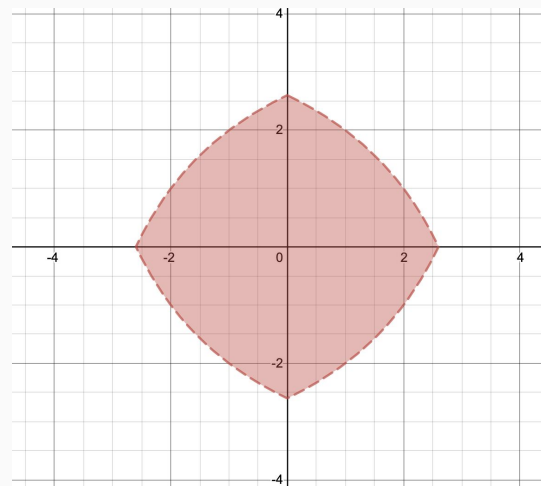
对于每个 (i,j) 预处理出相对应的 t , 总复杂度 $O(N^2)$

D. Pulse Nova

- 平面上有若干直线，放一个半径固定的圆使得直线在圆内部分长度最大。
- 常规做法：
 - 考虑圆心所在位置，一条直线影响的区域为将直线左右平移 R 形成的区域。
 - 求出所有区域边界的交点，平面内形成若干为凸的区域。
 - 每个区域内都是某些直线对答案产生贡献，贡献为凸函数
 - 在每个区域三分套三分求极值即可。
 - 复杂度 $O(n^2 * \text{三分套三分})$

E. Non-Maximum Suppression

- 注意到所有正方形的大小都是相同的
- 对于单个正方形而言, 可能与其产生冲突的正方形在一个固定范围内
- 虽然这个形状是不规则的, 但它一定在菱形到矩形范围之间
- 暴力拉取矩形范围内的点, 至多有4个点, 逐一比较即可
double精度可能不够
- 另做法: 找出离该点4个方向曼哈顿距离最近的点 check



F. Ferry

题意：

有三个岛ABC，有一艘船，它的航线是A->B->C->A...，一开始n个游客和船夫(数量无限)都在a岛，游客有的想去b岛有的想去c岛，船只能坐三个人，划船时间为三个中最大的 t_i ，另外，游客不能在非目的地下船，船夫没有任何限制，可以在任何地方下船，最后所有船夫还有船都必须回到起始点，问最少需要多少时间能把所有游客送到目的地

F. Ferry

结论:

- 最多可能使用三个船夫, 一个是一直在运输, 其他两个有可能先被接过去bc岛停留, 然后下一次三个游客一起开船过去, 其中一个在b/c岛的船夫把船开回a岛
- 有四种可能的组合, 三个船夫, 两个船夫和一个游客(最多一组), 一个船夫和两个游客(最多一组), 三个游客
- 分别对去b和c岛的游客按 t_i 排序, 去b/c岛游客在同一个船上的游客 t_i 是连续的

F. Ferry

DP: $F[i][x][y][z]$ 表示按时间从大到小排序前 i 个人已经安排好, 已安排的船仍有 x 个去 B 岛的空位和 y 个去 C 岛的空位, 同时外面还剩下 z 个船夫的最小时间。

可以证明: 存在一种最优解使得 x 和 y 始终不超过 2。 z 最小只可能为 -1 (两个船夫与一个较快的游客同乘先出发; 之后由三个较慢的游客出发, 之前的船夫返回)

故 DP 范围: $1 \leq i \leq n, 0 \leq x, y \leq 2, -1 \leq z \leq 2$

F. Ferry

转移时枚举第*i*个人选择占B空位(是否补票)/占C空位/占两个B产生一个C/开一条新船(两人位或者三人位)/三个船夫等, 约10种

复杂度约为 $O(3*3*4*n * 10)$ 。

出题人后来把*t_i*的数值改小成1000, 所以我们可以利用这个数值小的特点, 先做个预处理, 三个三个组队开船走掉, 然后 4000^2 的dp解决

G. Game on the Tree

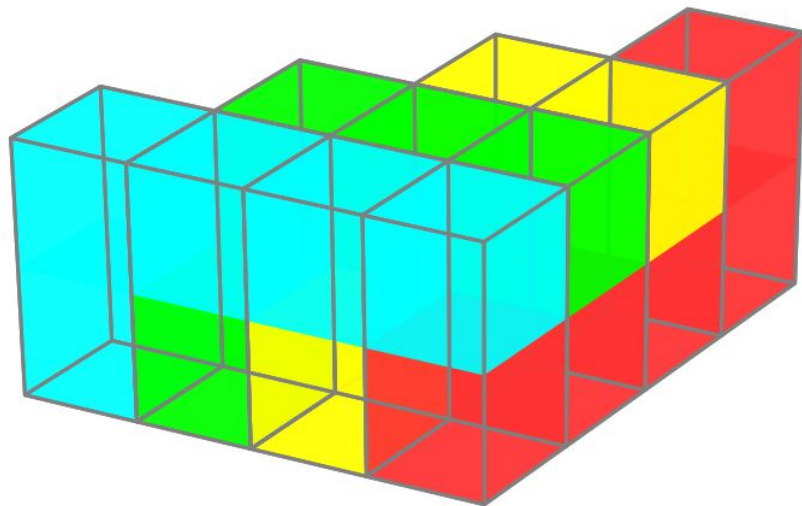
- 题目大意: 给定树上的一个棋子, 博弈双方轮流移动这个棋子, 要求每次移动距离大于对手上一次移动的距离, 不能移动者负。问给定的树有多少个子图后手必胜。
- 博弈结论: 直径中点后手必胜, 否则先手必胜。策略为胜方每次移动到当前位置关于直径中点的任意一个对称位置, 负方下一步一定会远离直径中点。直到直径端点结束。
- 问题变为求根结点是多少子图的直径中点。 $O(n)$ 或 $O(n\log n)$ 树上DP皆可。注意避免退化为 $O(n^2)$ 。

H. Mr.Panda and SAD

- 先处理字符串内部的 SAD
 - 剩下有用的前缀为 AD_, D_
 - 有用的后缀为 _S, _SA
 - 单独的串 A
- 如果没有 A
 - 给每个 _S 后面接 AD_, _SA 后面接 D_。
 - 例外情况: _S 后面全部接 AD_ 会形成环, _SA 和 D_ 亦然。
- 如果有 A
 - A 的用处仅为 $_S + A \Rightarrow _SA$, 枚举用几个 A, 剩下同没有 A 的做法。
- 如果最后整个串形成一个环才能取到最大答案, 答案减 1。

I. Mr. Panda and Blocks

将 (i, j) 放到 $(i, j, 1), (i, j, 2)$ 即可



J. Wire-compatible Protocol buffer

题目大意

- Protocol buffer 是一个把任意对象序列化成bytes的工具
- 字段可以是required, optional, repeated
- 字段类型可以是double, string, message
- 如果某两个类型中, 任意对象序列化后, 都可以当成另一个类型来解析, 则认为他们wire-compatible
- 给一些类型, 每次查询两个类型是否wire-compatible

J. Wire-compatible Protocol buffer

题解

- 如果两个 message A 和 B 的 $\text{set}(\text{pair}(\text{tag_num}, \text{label}))$ 不同, 则显然 incompatible.
- 如果 A 和 B 有个 field 的 tag_num 相同, 且 A 的 field 类型为 C, B 的 field 类型为 D, 如果 C 和 D incompatible, 则 A 和 B incompatible.
- 其他情况则 compatible
- 从显然 incompatible 的 message 对开始 bfs, 找到所有 incompatible 的 message 对.

K. Russian Dolls on the Christmas Tree

子树的答案为子树大小 - 子树内有多少点对权值相差1

求 i 和 $i+1$ 的lca, 从lca到根的路径上的点答案减1

用tarjan求lca, 复杂度 $O(n\alpha(n))$

实际上 $n\log n$ 求lca, 线段树合并, 甚至启发式合并都可以在时限内通过

L. Spiral Matrix

题目大意: 给一个 $n \times m$ 的矩阵, 从任一点出发, 任一点结束。只能前进或者右转, 要求不重复访问矩阵的所有格子。问有多少种不同的走法。

题解:

- 在草稿纸上画几个例子, 或者对小数据暴力打表, 发现规律。
- 一般情况: 两个“螺旋”, 两个螺旋的情况由螺旋的分界线和矩阵边界交点唯一确定。一共有 $2*(n-1+m-1)$ 个这样的交点。
- 注意几种特殊情况: 1×1 , $1 \times n$, $2 \times n$ 。

